

# Wieviel Fachkompetenz brauchen Mathematiklehrer\*innen ?

Gesellschaftspolitische und persönlichkeitsbildene Aspekte des  
Mathematikunterrichts.

Franz Pauer

Universität Innsbruck

20. November 2024

# Lehrpläne

- ▶ Lehrpläne in Österreich bzw. Rahmenrichtlinien für die Lehrpläne in Südtirol sind für alle Lehrpersonen verbindlich.

Nicht verbindlich: Schulbücher, Kompetenzkatalog Matura, etc.

- ▶ Lehrpläne für alle Schulen in Österreich

Web-Seite des BMBWF

[www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/schulpraxis/lp.html](http://www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/schulpraxis/lp.html)

- ▶ Rahmenrichtlinien des Landes für die Lehrpläne aller deutschsprachigen Schulen in Südtirol

Web-Seite der Südtiroler Landesverwaltung

[www.provinz.bz.it/bildung-sprache/deutschsprachige-schule/bildungsverwaltung/rahmenrichtlinien-landbestimmungen.asp](http://www.provinz.bz.it/bildung-sprache/deutschsprachige-schule/bildungsverwaltung/rahmenrichtlinien-landbestimmungen.asp)

# Allgemeine und übergreifende Bildungsziele

- ▶ Lehrplan AHS, allgemeines Bildungsziel, Bildungsbereiche der Oberstufe (Sekundarstufe 2):

**„Der Unterricht hat aktiv zu einer den Menschenrechten verpflichteten Demokratie beizutragen.“**

- ▶ Lehrpläne Mittelschule und AHS (Sekundarstufe 1), übergreifende Themen, politische Bildung:

Die Lernenden sollen auch dazu befähigt werden

**„im Dienste der Menschenrechte, der Demokratie und der Rechtsstaatlichkeit in der Gesellschaft aktiv werden zu wollen“**

- ▶ Welchen Beitrag zu diesen wichtigen Bildungszielen werden Sie in Ihrem Mathematikunterricht leisten?

# Einige Bildungsziele des Mathematikunterrichts

Lehrpläne Mathematik AHS Unterstufe und Mittelschule,  
Bildungs- und Lehraufgabe:

- ▶ **„Mathematik bzw. der Mathematikunterricht sollen Vorbild sein, für Behauptungen Argumente zu geben und auch von anderen einzufordern. Mängel in Argumentationen sollen erkannt und aufgezeigt werden.“**
- ▶ **„Dadurch werden kritisches Denken, Offenheit gegenüber verschiedenen Standpunkten und Sichtweisen sowie die mündige Teilnahme an gesellschaftlichen Diskussions- und Entscheidungsprozessen gefördert.“**

# Einige Bildungsziele des Mathematikunterrichts

Lehrplan Mathematik AHS Oberstufe (Sekundarstufe 2):

- ▶ **Mathematik entwickelt die Fähigkeit zum Argumentieren, Kritisieren und Urteilen und fördert die Fähigkeit, zugleich verständlich und präzise zu sprechen.**
- ▶ **Im Mathematikunterricht soll verständnisvolles Lernen als individueller, aktiver und konstruktiver Prozess im Vordergrund stehen.**

# Bildungsziele einst und jetzt

- ▶ Einführung der Schulpflicht (18. Jhd.) für den Bedarf eines autoritären Systems.
- ▶ Ziel damals: einige Fertigkeiten und Kenntnisse vermitteln, die auf Zuruf ausgeführt werden.
- ▶ Heute (21. Jhd.): Schule für eine demokratische Gesellschaft. Die Schülerinnen und Schüler sollen nicht mehr zu Untertanen, sondern zu mündigen Menschen erzogen werden.
- ▶ Der Mathematikunterricht im 21. Jhd. muss sich also wesentlich von dem im 18. und 19. Jhd. unterscheiden!

# Mündige Menschen oder Untertanen?

## Beispiel: Quadratische Gleichungen

Die Aufgabe „Finde alle reellen Zahlen  $x$  so, dass  $x^2 + 6x - 1 = 0$  ist!“ ist eine quadratische Gleichung.

Man kann sie einfach lösen:

- ▶ Weil  $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$  ist, können wir  $(x + 3)^2 - 9$  anstatt  $x^2 + 6x$  schreiben.
- ▶ Wir suchen daher alle (reellen) Zahlen  $x$  so, dass  $(x + 3)^2 - 9 - 1 = 0$ , also  $(x + 3)^2 = 10$  ist.
- ▶  $(x + 3)^2$  und  $10$  sind positive Zahlen, Wurzel ziehen ergibt  $x + 3 = \pm\sqrt{10}$ .
- ▶ Also sind die gesuchten Zahlen  $-3 + \sqrt{10}$  und  $-3 - \sqrt{10}$ .

# Mündige Menschen oder Untertanen?

ODER (?)

- ▶ Die quadratische Gleichung  $x^2 + 6x - 1 = 0$  ist wie folgt zu lösen:
- ▶ Lerne die Lösungsformel  $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$  auswendig!
- ▶ Setze in die Lösungsformel ein: 6 für  $p$  und  $-1$  für  $q$  !
- ▶ Dann sind  $-\frac{6}{2} \pm \sqrt{\frac{6^2}{4} - (-1)} = -3 \pm \sqrt{10}$  die zwei Lösungen.

# Mündige Menschen oder Untertanen?

- ▶ Welcher Unterricht passt zu einer Demokratie, welcher zu einem autoritären System?
  1. Die Schülerinnen und Schüler lernen eine Formel auswendig und lösen die Aufgabe durch „Einsetzen in die Formel“.
  2. Die Schülerinnen und Schüler verstehen, wie und warum man die Lösung einer Aufgabe findet.
- ▶ Welcher Unterricht erfordert von der Lehrperson mehr mathematische Fachkompetenz, welcher weniger?

# Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln

## **Beispiel: Schlussrechnungen**

- ▶ Aufgabe 1: Zwei Kilogramm Äpfel kosten 4 Euro. Wieviel kosten 3 Kilogramm Äpfel?
- ▶ Aufgabe 2: Herr Meier kauft bei einem Obstbauern ein Kilogramm Äpfel um 2 Euro. Am nächsten Tag fährt er mit einem Lastwagen dorthin und kauft tausend Kilogramm derselben Sorte Äpfel. Wieviel muss er dafür bezahlen?

# Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln

- ▶ **Keine Antwort möglich, solange der Zusammenhang zwischen Masse und Preis von Äpfeln nicht bekannt ist.**
- ▶ Wenn im Obstgeschäft die Aktion „Nimm drei, zahl zwei“ läuft, kosten 3 Kilogramm Äpfel 4 Euro.
- ▶ Jeder Händler weiß, dass Herr Meier sicher viel weniger als 2000 Euro zahlen wird.

## Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

- ▶ Steuer für ein steuerpflichtiges Einkommen von 25 000 Euro (im Jahr 2023): 3 248 Euro.
- ▶ Steuer für ein steuerpflichtiges Einkommen von 50 000 Euro (im Jahr 2023)?
- ▶ 12 720 Euro (für das doppelte Einkommen zahlt man viel mehr als doppelt so viel Steuer).
- ▶ Sachwissen nötig: Die Funktion, die jedem Einkommen die entsprechende Steuer zuordnet, ist nicht linear, sondern stückweise linear, stetig und konvex.

# Vorurteilsfrei Denken

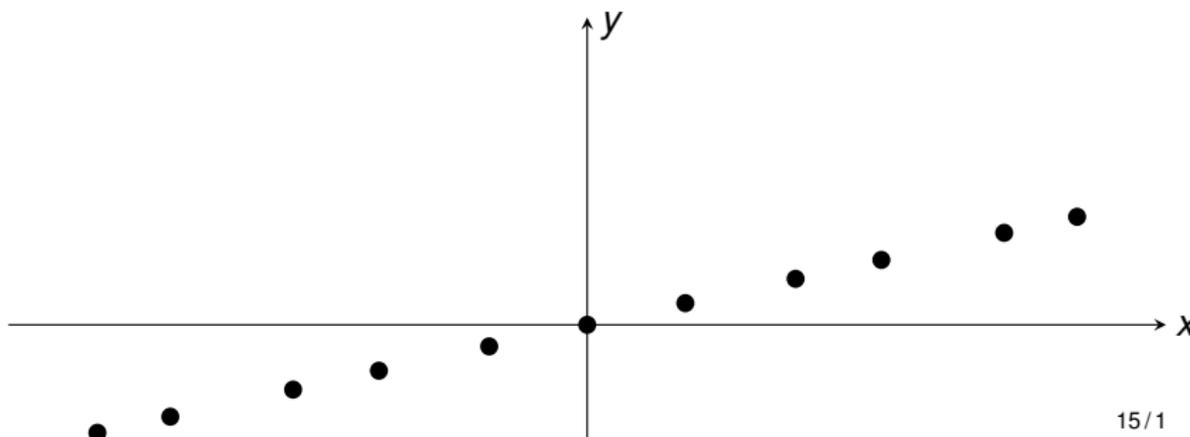
- ▶ Setze die Buchstabenfolge fort: c,d,e,f,g,...
- ▶ Antwort der Klavierschülerin: c,d,e,f,g,a,... (Tonleiter)
- ▶ Antwort im Deutschunterricht: c,d,e,f,g,h, ... (Alphabet)
- ▶ Leider kommen Fragen dieses Typs in Aufnahmetests vor!

## Vorurteilsfrei Denken

- ▶ Setze die Zahlenfolge fort: 1,2,3,...
- ▶ Antwort des Walzertänzers: 1,2,3,1,2,3,...
- ▶ Antwort nach einem Mathematikstudium: Es gibt unendlich viele Möglichkeiten, Bildungsgesetze zur Fortsetzung von 1,2,3,... anzugeben, die nur Addition und Multiplikation verwenden.
  - ▶ Zum Beispiel: Für jede Zahl  $n$  sei  $n + (n - 3) \cdot (n - 2) \cdot (n - 1)$  („ $n$  plus das Produkt seiner drei Vorgänger“) das  $n$ -te Glied einer Folge.
  - ▶ Für  $n = 1, 2, 3, 4$  erhält man
$$1 + (-2) \cdot (-1) \cdot 0 = 1,$$
$$2 + (-1) \cdot 0 \cdot 1 = 2,$$
$$3 + 0 \cdot 1 \cdot 2 = 3,$$
$$4 + 1 \cdot 2 \cdot 3 = 10, \dots$$
- ▶ Mit solchen Fragen in Tests werden nicht kognitive Fähigkeiten überprüft, sondern ob jemand so wie die

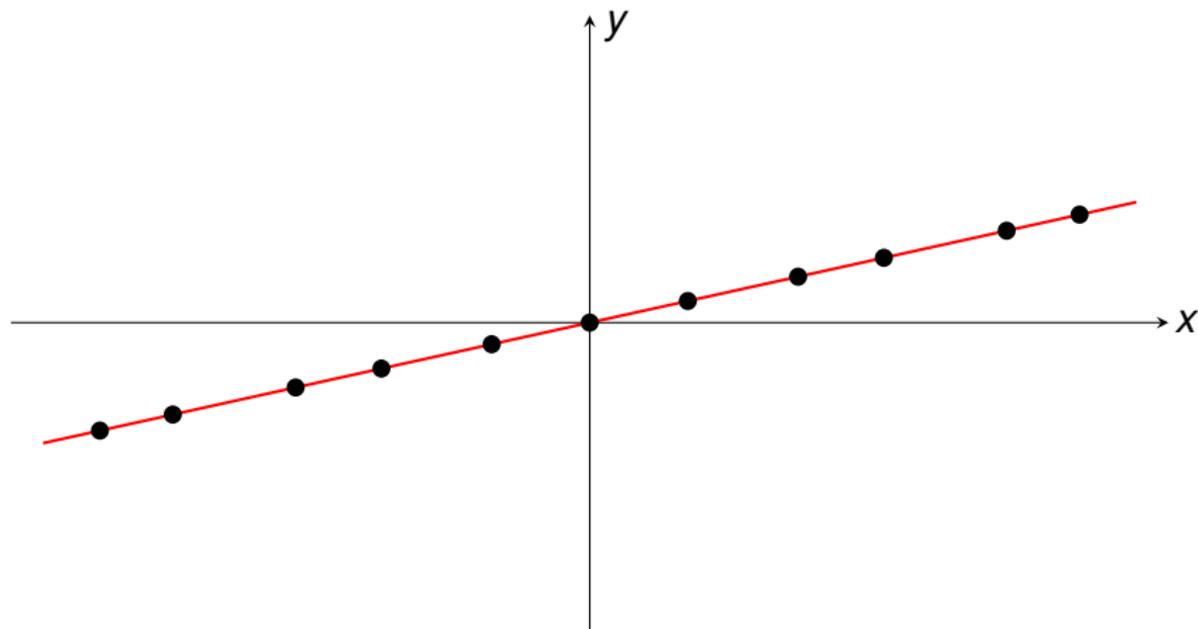
# Vorurteilsfrei Denken

- ▶ „Interpolation“: Gegeben sind Zahlenpaare  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ .  
Gesucht ist eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x_i) = y_i$ ,  
 $i = 1, \dots, n$ .
- ▶ Ohne ausreichendes Wissen über den Vorgang, aus dem die Zahlenpaare entstanden sind, kann man die Aufgabe nicht eindeutig lösen. Wenn diese Punkte wie im folgenden Bild alle auf einer Geraden liegen,



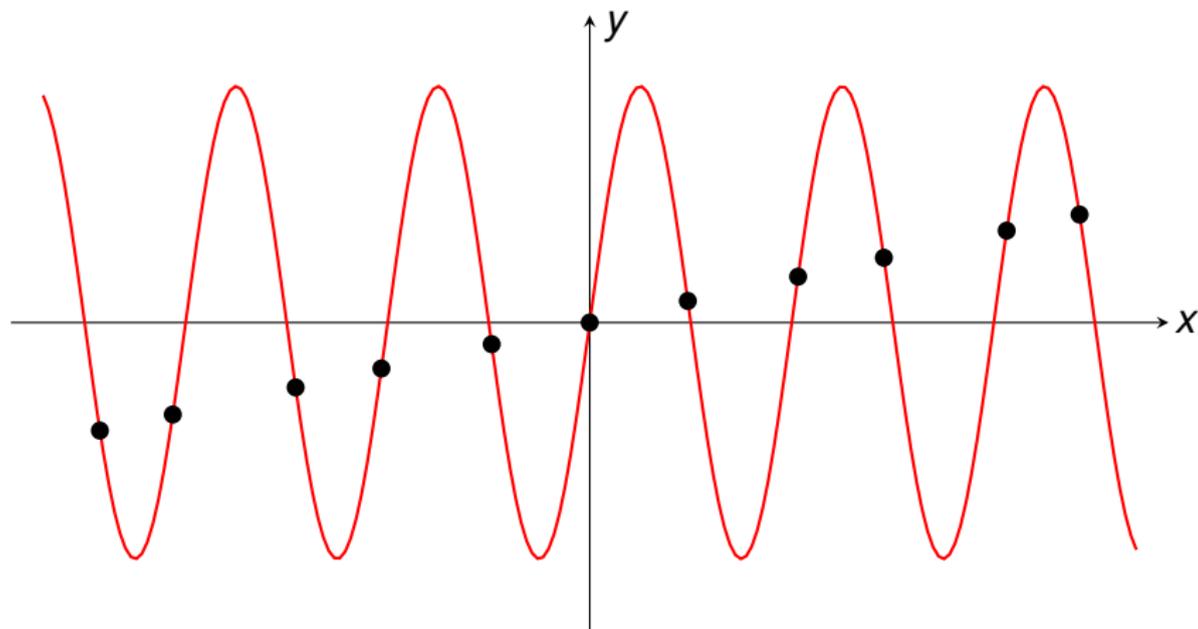
# Vorurteilsfrei Denken

ist die Versuchung groß, den betrachteten Vorgang durch eine lineare Funktion zu beschreiben:



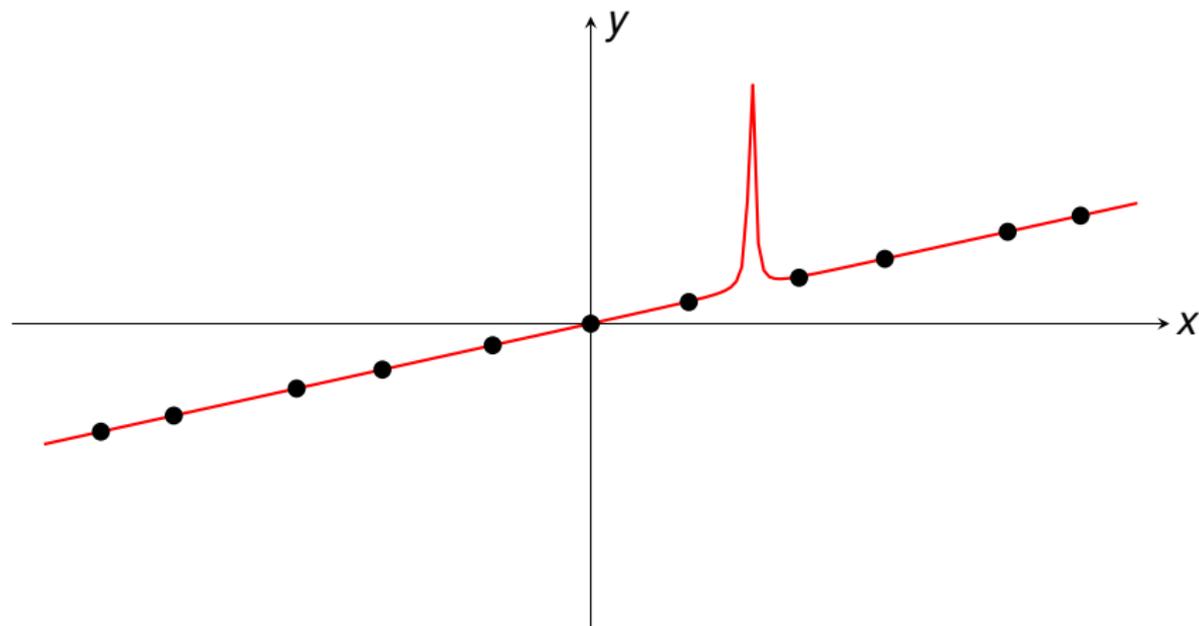
## Vorurteilsfrei Denken

Wenn aber der Vorgang periodisch ist, wäre ihm eine Beschreibung durch eine Sinusfunktion wie im folgenden Bild besser angepasst.



# Vorurteilsfrei Denken

Und wenn durch die Funktion ein Impuls beschrieben wird:



# Einige Ziele des Lehramtsstudiums

Absolvent\*innen des Lehramtsstudiums mit Unterrichtsfach Mathematik können

- ▶ jenen Teil der Mathematik, den sie in der Schule unterrichten, einfach und verständlich erklären, und gut motivieren.  
Man kann aber nur das einfach und verständlich erklären, was man selber sehr gut verstanden und durchdacht hat.
- ▶ alle Unterrichtsinhalte begründen und kritische Fragen zu deren Sinn qualifiziert beantworten.
- ▶ ihren Mathematikunterricht so gestalten, dass die Entwicklung der Kinder und Jugendlichen zu mündigen Menschen in einer demokratischen Gesellschaft (und nicht zu unkritischen Untertanen in einer autoritären Gesellschaft) gefördert wird.

# Einige Ziele des Lehramtsstudiums

Absolvent\*innen des Lehramtsstudiums mit Unterrichtsfach Mathematik können

- ▶ durch ihren Unterricht sachliches und vorurteilsfreies Denken fördern.
- ▶ ihren Unterricht selbständig planen und sich bei Lehrplanänderungen neue Inhalte selbständig erarbeiten.
- ▶ Unterlagen dazu, insbesondere Schulbücher, kritisch verwenden und gegebenenfalls Mängel darin erkennen.
- ▶ für Mathematik und ihre Anwendungen Interesse wecken, nützliche Fertigkeiten für die Berufs- und Arbeitswelt vermitteln.
- ▶ **Und dazu braucht es auch viel an mathematischer Fachkompetenz und mathematischem Fachwissen der Lehrperson!**

# Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- ▶ Sie wissen wahrscheinlich aus der Schule noch die Summen- und Produktregel des Differenzierens:
- ▶ Wenn zwei Funktionen differenzierbar sind, dann auch ihre Summe und ihr Produkt. Es ist

$$(f + g)' = f' + g' \quad \text{und} \quad (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

- ▶ Aber wer weiß, was  $f + g$  und  $f \cdot g$  bedeuten?

# Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- ▶  $f : M \longrightarrow \mathbb{R}, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$  Funktionen von  $M$  nach  $\mathbb{R}$
- ▶  $f + g : M \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto (f + g)(x) := f(x) + g(x)$
- ▶  $f + g$  Summe von Funktionen,  $f(x) + g(x)$  Summe von reellen Zahlen
- ▶ Analog:  $f \cdot g : M \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$   
Produkt von Funktionen

# Fachliche Anforderungen in der Sekundarstufe 1 werden häufig unterschätzt!

Einführung von Grundkonzepten, zum Beispiel:

- ▶ Zahlbereichserweiterungen
- ▶ Umgang mit Rechenregeln
- ▶ Rationale Zahlen (Rechenoperationen, Darstellung)
- ▶ Lösen von Aufgaben (z.B. Gleichungen) durch äquivalentes Umformen (Grundstrategie)
- ▶ Beschreibung von unendlichen Lösungsmengen durch endlich viele Daten
- ▶ Grundbegriffe der Geometrie (Länge, Winkel, Flächeninhalt, Volumen, Parallelverschieben, Drehung)
- ▶ Koordinatensystem in der Ebene (Ebene als  $\mathbb{R}^2$ )
- ▶ beschreibende Statistik (Funktionen)
- ▶ mathematische Modellierung („Schlussrechnung“)
- ▶ Algorithmisches Denken

## Die richtige Fährte legen

- ▶ Bei der Planung des Unterrichts ist es einerseits wichtig, zurück zu schauen: Was haben die Schülerinnen und Schüler bisher gelernt? Worauf kann der Unterricht aufbauen?
- ▶ Andererseits ist es auch wichtig, nach vorne zu schauen: Was wird in folgenden Schuljahren auf das zu unterrichtende Thema aufbauen? Wie soll es unterrichtet werden, damit ein „roter Faden“ erkennbar ist und Fehlvorstellungen vermieden werden?
- ▶ Das ist ein weiterer Grund dafür, dass alle Lehrpersonen für den Unterricht in der gesamten Sekundarstufe ausgebildet werden.

# Die richtige Fährte legen: „Binomische Formeln“

- ▶ Oft wird ein „Term“ als „sinnvoller mathematischer Ausdruck“ oder „Rechenausdruck“ bezeichnet.
- ▶ Aus einem österreichischen Schulbuch der 7. Schulstufe:  
*Terme der Art  $(a + b)$ ,  $(a - b)$  heißen Binome.*  
*Es gilt:  $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ .*
- ▶ Matrizenrechnung in der 10. Schulstufe (BHS): Es gibt  $2 \times 2$ -Matrizen  $a, b$  mit  $(a + b) \cdot (a - b) \neq a^2 - b^2$
- ▶ Was ist falsch?
- ▶ Kann man mit Matrizen keinen „Rechenausdruck“ oder keinen „sinnvollen mathematischen Ausdruck“ bilden?

# Die richtige Fährte legen: „Binomische Formeln“

- ▶ „Termrechnung“ bedeutet „Rechnen in kommutativen Ringen“. Wegen

$$(a + b) \cdot (a - b) = a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b = a^2 - b^2$$

gilt diese „binomische Formel“ in allen kommutativen Ringen. Die Matrizenmultiplikation ist aber nicht kommutativ.

- ▶ Im Schulunterricht treten im wesentlichen zwei Beispiele von kommutativen Ringen auf: Zahlbereiche und der Ring aller reellwertigen Funktionen.
- ▶ In der Sekundarstufe 1 bedeutet „Termrechnung“ : „Einüben der Rechenregeln für das Rechnen mit ganzen und rationalen Zahlen“.

# Die richtige Fährte legen: Binomische Formeln

- ▶ Bessere Formulierung der binomischen Formeln in der Sekundarstufe 1: Für alle Zahlen  $a$  und  $b$  ist  $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$ .
- ▶ In Worten: Die Differenz der Quadrate zweier Zahlen ist das Produkt von deren Summe und deren Differenz.
- ▶ Wer kann im Kopf  $401^2 - 399^2$  berechnen?
- ▶  $401^2 - 399^2 = (401 + 399) \cdot (401 - 399) = 800 \cdot 2 = 1600$

# Die richtige Fährte legen: Lineare Gleichungen

Was haben die folgenden drei Aufgaben gemeinsam?

- ▶ 8. Schulstufe: Finde alle Paare reeller Zahlen  $(x, y)$  mit  $3x + 4y = 5$  !  
(lineare Gleichung mit 2 Unbekannten)
- ▶ 11. Schulstufe: Finde alle Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit:  
für alle natürlichen Zahlen  $n$  ist  $a_{n+1} - 2 \cdot a_n = 6$  !  
(lineare Differenzengleichung der Ordnung 1)
- ▶ 12. Schulstufe: Finde alle differenzierbaren Funktionen  $f$   
mit  $f' - 2f = 7$  !  
(lineare Differenzialgleichung der Ordnung 1)

# Die richtige Fährte legen: Lineare Gleichungen

Bei allen drei löst man zuerst die entsprechende homogene Gleichung. Deren Lösungsmenge besteht aus allen Vielfachen einer einzigen Lösung, die man leicht findet.

- ▶ Finde alle Paare reeller Zahlen  $(x, y)$  mit  $3x+4y=0$  !  
Lösungsmenge: alle Vielfachen von  $(-4, 3)$
- ▶ Finde alle Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit:  
für alle natürlichen Zahlen  $n$  ist  $a_{n+1} - 2 \cdot a_n = 0$  !  
Lösungsmenge: alle Vielfachen der „geometrischen Folge“  
 $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$
- ▶ Finde alle differenzierbaren Funktionen  $f$  mit  $f' - 2f = 0$  !  
Lösungsmenge: alle Vielfachen der „Exponentialfunktion“  $g$   
mit  $g(t) = e^{2t}$

# Die richtige Fährte legen: Lineare Gleichungen

Finde dann irgendeine Lösung der ursprünglichen Gleichung und addiere diese zu jedem Element der Lösungsmenge der homogenen Gleichung!  
( Alle drei Aufgaben sind lineare Gleichungen mit eindimensionaler Lösungsmenge).

- ▶  $\{(1, \frac{1}{2}) + c \cdot (-4, 3) \mid c \in \mathbb{R}\}$  Lm. von  $3x + 4y = 5$   
(8. Schulstufe)
- ▶  $\{(-6)_{n \in \mathbb{N}} + c \cdot (2^n)_{n \in \mathbb{N}} \mid c \in \mathbb{R}\}$  Lm. von  $a_{n+1} - 2 \cdot a_n = 6$   
(11. Schulstufe)
- ▶  $\{\frac{-7}{2} + c \cdot g \mid c \in \mathbb{R}\}$  Lm. von  $f' - 2f = 7$   
 $g$  ist die Funktion mit  $g(t) = e^{2t}$ .  
(12. Schulstufe)

# Persönlichkeitsbildung im Mathematikunterricht

- ▶ Im Mathematikunterricht lernt man nicht nur nützliche Verfahren zum Lösen verschiedener Aufgaben, sondern auch vorurteilsfrei und kritisch zu denken.
- ▶ Für eine demokratische Gesellschaft ist es wichtig, dass möglichst viele ihrer Menschen Behauptungen, Nachrichten oder Versprechungen nicht einfach für wahr halten, ohne Begründungen zu fordern oder zumindest „Ist das wirklich so?“ gefragt zu haben.
- ▶ Kein Unterricht ist „wertfrei“, auch der Mathematikunterricht nicht.
- ▶ Zwar sind die Ergebnisse der Mathematik, die unterrichtet werden, nicht von den Wertvorstellungen der jeweiligen Gesellschaft abhängig, aber sehr wohl die Art, wie diese vermittelt werden.

# Persönlichkeitsbildung im Mathematikunterricht

- ▶ Die heutigen österreichischen Lehrpläne verlangen, dass im Mathematikunterricht auch Werte vermittelt werden, die für den Bestand unserer demokratischen Gesellschaft wichtig sind.
- ▶ Wenn im Mathematikunterricht erlernt wird, klar und genau zu denken, verständlich und präzise zu sprechen, Aufgaben systematisch abzuarbeiten, dann wird damit auch das Selbstbewusstsein der Kinder und Jugendlichen gestärkt („Ich kann Aufgaben und Probleme durch Nachdenken und Diskussion lösen“).

# Persönlichkeitsbildung im Mathematikunterricht

Mehr dazu in

Pauer, F. (2021): Persönlichkeitsbildung im Mathematikunterricht. Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG) 53, 107-116.

<https://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2021>

# Schlussbemerkungen

- ▶ Die Sprache im Mathematikunterricht in der Schule muss einfach und verständlich sein und möglichst wenige Fachbegriffe verwenden.
- ▶ Die notwendigen Fachbegriffe müssen sorgfältig und präzise eingeführt werden (wenn auch nicht immer durch Definitionen im Sinn der Mathematik).
- ▶ Die Inhalte sollen so dargestellt werden, dass sie für die Schüler/innen (in der jeweiligen Altersstufe und mit ihrem jeweiligen Wissensstand) gut verständlich sind.
- ▶ Möglichst viele Inhalte sollen nachvollziehbar hergeleitet und begründet werden.

# Schlussbemerkungen

- ▶ Die Übungsaufgaben müssen zugleich einfach und präzise formuliert werden. Sie sollen das kritische und vorurteilsfreie Denken, Modellieren und Problemlösen trainieren.
- ▶ Die Planung des Unterrichts muss nicht nur berücksichtigen, was zu einem Thema schon bekannt ist, sondern auch, was in späteren Jahren darauf aufbauen soll.
- ▶ **Ein solche Unterricht erfordert Lehrpersonen mit hoher fachlicher und didaktischer Qualität.**

# Schlussbemerkungen

- ▶ Zieht man die hohe Verantwortung des Lehrberufs, die umfangreichen fachlichen, fachdidaktischen und pädagogischen Aufgaben und die damit verbundenen Herausforderungen an die Lehrpersonen in Betracht, dann sind 6 Jahre Studium keineswegs zu lang.
- ▶ Wer wird nach dem 6-jährigen Studium noch in der Sekundarstufe 1 unterrichten wollen?
- ▶ Hoffentlich die Besten!

Alles Gute für Ihr Studium! Danke für die Aufmerksamkeit!

<https://www.uibk.ac.at/mathematik/personal/pauer/>

franz.pauer@uibk.ac.at